Induzione e Coinduzione

Gaboardi Marco
Dipartimento di Informatica
Università degli studi di Torino
gaboardi@di.unito.it

17 ottobre 2005

1 Introduzione

Queste note vogliono essere un introduzione agli insiemi induttivamente e coinduttivamente definiti e ai relativi principi di dimostrazione per induzione e per coinduzione. In particolare avendo come oggetto di studio alcuni particolari insiemi e loro proprietà sottointenderemo il fatto di lavorare in una teoria degli insiemi completamente formalizzata, per esempio la *teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel*.
Un interessante approccio alternativo è quello di considerare le nozioni di insiemi induttivamente e coinduttivamente definiti come *nozioni primitive* nella teoria che si sviluppa e studiare i limiti e i vantaggi di tali principi e loro estensioni, questo approccio è stato particolarmente studiato nella *teoria dei tipi di Martin-Löf*.

2 Insiemi di regole

Dato un insieme universo $\mathcal{U}$ possiamo definire un insieme di regole $\mathcal{R}$ su $\mathcal{U}$ nel seguente modo:

Definizione 1. *Un* ***insieme di regole*** $\mathcal{R}$ *sull'insieme* $X \subseteq \mathcal{U}$ *è un sottinsieme* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X) \times X$ *cioè:*

$$\mathcal{R} = \{(S, x) | S \subseteq X, x \in X\}$$

In quanto segue aderiremo alla pratica comune di "disegnare" una regola (S, x) come:

$$\frac{x_1, \ldots, x_n}{x}$$

dove $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. In particolare siamo qui interessati a studiare insiemi di regole che soddisfano alcuni vincoli.

Definizione 2. *Un insieme di regole $\mathcal{R}$ è* ***finitario*** *se e solo se* $\forall (S, x) \in \mathcal{R}$, *$S$ è un insieme finito.*

Definizione 3. *Un insieme di regole $\mathcal{R}$ è* ***deterministico*** *se e solo se* $\forall (S_1, x), (S_2, y) \in \mathcal{R}$ $(x = y \Longrightarrow S_1 = S_2)$.

Dato un insieme di regole $\mathcal{R}$ su $\mathcal{U}$, $\mathcal{R}$ induce su $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ un operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ definito come:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \exists (S, x) \in \mathcal{R} \ \wedge \ S \subseteq X\}$$

Nel seguito studieremo particolari insiemi che risultano essere punti fissi di operatori indotti da insiemi di regole. Ricordiamo ora senza dimostrarla una importante proprietà di qualsiasi insieme *delle parti*.

Proprietà 4. *Dato un qualsiasi insieme $X \subseteq \mathcal{U}$ abbiamo:*

$$\forall H \subseteq \mathcal{P}(X)(\exists J, M \in \mathcal{P}(\mathcal{U})(J = \bigcup H \wedge M = \bigcap H))$$

3 Insieme induttivamente definito dall'alto

Definizione 5. *L'****insieme induttivamente definito da ϕ dall'alto*** *è l'insieme:*

$$I^*_\phi \overset{def}{=} \bigcap \{Y \subseteq \mathcal{U} \mid \phi(Y) \subseteq Y\}$$

L'esistenza di I^*_ϕ è giustificata dalla proprietà 4 rispetto a $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Teorema 6.

(i) $I^*_\phi = \phi(I^*_\phi)$

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $\phi(X) \subseteq X$ *abbiamo* $I^*_\phi \subseteq X$.

(iii) $\forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *t.c.* $\phi(X) \subseteq X$ *abbiamo* $Y \subseteq X$ *allora* $Y \subseteq I^*_\phi$.

Dimostrazione.

(i) Dato $H \overset{\text{def}}{=} \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) | \phi(X) \subseteq X\}$ abbiamo:

$[\phi(I^*_\phi) \subseteq I^*_\phi]$

	$\forall X \in H \quad I^*_\phi = \bigcap H \subseteq X$	definizione di I^*_ϕ
$\Longrightarrow$	$\forall X \in H \quad \phi(I^*_\phi) = \phi(\bigcap H) \subseteq \phi(X)$	monotonia di ϕ
$\Longrightarrow$	$\forall X \in H \quad \phi(I^*_\phi) = \phi(\bigcap H) \subseteq \phi(X) \subseteq X$	$\forall X \in H(\phi(X) \subseteq X)$
$\Longrightarrow$	$\phi(I^*_\phi) = \phi(\bigcap H) \subseteq \bigcap \{\phi(X) \| X \in H\} \subseteq \bigcap \{X \| X \in H\}$	quantificazione
$\Longrightarrow$	$\phi(I^*_\phi) \subseteq I^*_\phi$	$\bigcap \{X \| X \in H\} = I^*_\phi$

$[I^*_\phi \subseteq \phi(I^*_\phi)]$

$$\begin{array}{lcl} & \phi(I^*_\phi) \subseteq I^*_\phi & \text{appena dimostrato} \\ \Longrightarrow & \phi(\phi(I^*_\phi)) \subseteq \phi(I^*_\phi) & \text{monotonia di } \phi \\ \Longrightarrow & \phi(I^*_\phi) \in H & \text{definizione di } H \\ \Longrightarrow & I^*_\phi = \bigcap H \subseteq \phi(I^*_\phi) & \text{proprietà di } \bigcap \\ \Longrightarrow & I^*_\phi \subseteq \phi(I^*_\phi) & \end{array}$$

(ii) Ogni $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tale che $\phi(X) \subseteq X$ appartiene ad H, per la definizione di H stesso, quindi $I^*_\phi = \bigcap H \subseteq X$.
(iii) Segue immediatamente dal fatto che $\phi(I^*_\phi) \subseteq I^*_\phi$. □

Il teorema ci dice (i) che I^*_ϕ è un punto fisso di ϕ e (ii)-(iii) che I^*_ϕ è il *minimo prepunto fisso* di ϕ. In realtà il teorema ci dice qualcosa in più cioè che I^*_ϕ è anche il *minimo punto fisso* di ϕ. Riformulando (ii) abbiamo un primo principio di dimostrazione:

$$\textbf{Induzione} \quad \phi(X) \subseteq X \implies I^*_\phi \subseteq X$$

Vediamo ora alcuni esempi di insiemi induttivamente definiti dall'alto e come il principio di induzione viene utilizzato nei diversi casi.

Numeri naturali Date le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\frac{}{0 \in X}\ \mathcal{R}_0 \qquad \frac{x \in X}{s(x) \in X}\ \mathcal{R}_s$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ come:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \cup \{S(x) \mid x \in X\}$$

Il minimo punto fisso di tale operatore:

$$\mathbf{N} = \bigcap \{Y \subseteq \mathcal{U} \mid \phi_{\mathcal{R}}(Y) \subseteq Y\}$$

può essere considerato l'insieme i cui oggetti sono (in corrispondenza biunivoca con) i numeri naturali (ogni elemento $\underbrace{s(s(\cdots s}_{\text{n volte}}(0)\cdots)) = s^n(0)$ è in corrispondenza biunivoca con un numero n). Su tale insieme assumiamo definite in modo intuitivo le usuali operazioni aritmetiche sui numeri naturali. Il principio di induzione associato a tale insieme può essere riformulato nel modo seguente:

$$\{0\} \cup \{s(x) \mid x \in X\} \subseteq X \implies \mathbf{N} \subseteq X$$

Tale principio è il classico principio di induzione sui numeri naturali, vediamone un'applicazione. Preso l'insieme:

$$X = \{x \in \mathcal{U} \mid \sum_{i=0}^{x} i = \frac{x(s(x))}{2}\}$$

si può verificare facilmente che $\phi_{\mathcal{R}}(X) \subseteq X$, infatti:

$$0 = \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(s(0))}{2}$$

quindi $0 \in X$ e per ogni x in X:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s(x)} i &= \sum_{i=0}^{x} i + s(x) \\
&= \frac{x(s(x))}{2} + s(x) \\
&= \frac{x(s(x)) + 2(s(x))}{2} \\
&= \frac{s(x)(x+2)}{2} \\
&= \frac{s(x)(s(s(x)))}{2}
\end{aligned}$$

quindi per ogni $x \in X$ abbiamo $s(x) \in X$ e quindi per induzione ogni $n \in \mathbf{N}$ è in X.

Alberi finiti Chiamiamo $\mathcal{T}_\Sigma$ l'insieme di tutti i possibili alberi sull'alfabeto Σ. Dato un alfabeto di simboli $\Sigma = \{\circ, \bullet, <, >, \ldots\}$ e le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\frac{}{\circ \in X}\ \mathcal{R}_1 \qquad \frac{t_1 \in X, \ldots, t_n \in X}{\circ < t_1, \ldots, t_n > \in X}\ \mathcal{R}_2$$

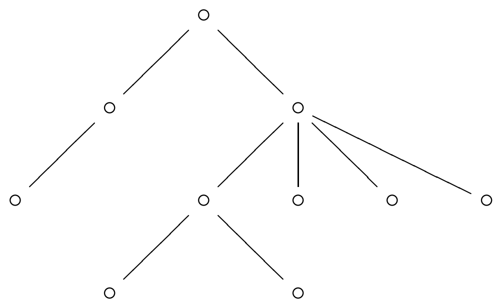
possiamo definire l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{T}_\Sigma) \to \mathcal{P}(\mathcal{T}_\Sigma)$ come:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\circ\} \cup \{\circ < t_1, \ldots, t_n > \ \mid t_1 \in X, \ldots, t_n \in X\}$$

L'insieme induttivamente generato dall'alto da tale operatore è:

$$\mathbb{T}_\circ^n = \bigcap \{Y \subseteq \mathcal{T}_\Sigma \mid \phi_{\mathcal{R}}(Y) \subseteq Y\}$$

$\mathbb{T}_\circ^n$ è l'insieme di alberi finiti sull'alfabeto $\Sigma = \{\circ\}$, siccome ogni albero in $\mathbb{T}_\circ^n$ è univocamente determinato possiamo considerate $\mathbb{T}_\circ^n$ l'insieme i cui oggetti sono tutti i possibili schemi di alberi finiti.
Abbiamo quindi una naturale rappresentazione grafica degli elementi di $\mathbb{T}_\circ^n$. Ad esempio possiamo rappresentare graficamente l'albero: $\circ < \circ < \circ >, \circ < \circ < \circ, \circ >, \circ, \circ, \circ >>$ come:



Per ogni albero di $\mathbb{T}^n_\circ$ possiamo deinire per ricorsione una funzione $\mathbf{h} : \mathbb{T}^n_\circ \to \mathbb{N}$, che ad ogni albero associa la relativa altezza.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\circ) &= 0 \\ \mathbf{h}(\circ < t_1, \ldots, t_n >) &= \max_{1 \le i \le n}(\mathbf{h}(t_i)) + 1 \end{aligned}$$

Analogamente possiamo definire una funzione $|\cdot| : \mathbb{T}^n_\circ \to \mathbb{N}$ che ad ogni albero associa il relativo numero di nodi:

$$\begin{aligned} |\circ| &= 1 \\ |\circ < t_1, \ldots, t_n >| &= \sum_{1 \le i \le n}(|t_i|) + 1 \end{aligned}$$

Infine possiamo definire una funzione $\mathbf{b} : \mathbb{T}^n_\circ \to \mathbb{N}\}$ che ad ogni albero associa il massimo numero di rami associati ad un unico nodo dell'albero:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\circ) &= 0 \\ \mathbf{b}(\circ < t_1, \ldots, t_n >) &= \max(\mathbf{b}(t_1), \ldots, \mathbf{b}(t_n), n) \end{aligned}$$

Si noti come le definizioni per ricorsione seguano perfettamente la struttura delle regole. Il principio di induzione associato a $\mathbb{T}^n_\circ$ può essere riformulato nel modo seguente:

$$\{\circ\} \cup \{\circ < t_1, \ldots, t_n > \mid t_1 \in X, \ldots, t_n \in X\} \subseteq X \implies \mathbb{T}^n_\circ \subseteq X$$

Utilizziamo il principio di induzione per provare che ogni albero ha altezza strettamente minore del numero di nodi. Dato l'insieme:

$$X = \{t \in \mathbb{T}^n_\circ \mid \mathbf{h}(t) < |t|\}$$

abbiamo che

$$\mathbf{h}(\circ) = 0 < 1 = |\circ|$$

quindi $\circ \in X$. Ora consideriamo gli elementi $\circ < t_1, \ldots, t_n >$ tali che per ogni $1 \le i \le n$ abbiamo che $t_i \in X$. Dalla definizione di $\mathbf{h}$ segue che:

$$\mathbf{h}(\circ < t_1, \ldots, t_n >) = \max_{1 \le i \le n}(\mathbf{h}(t_i)) + 1$$

quindi per un qualche j tale che $1 \leq j \leq n$ abbiamo:

$$\mathbf{h}(\circ < t_1, \ldots, t_n >) = \mathbf{h}(t_j) + 1$$

ma $t_j \in X$ quindi $\mathbf{h}(t_j) < |t_j|$ allora abbiamo

$$\mathbf{h}(\circ < t_1, \ldots, t_n >) = \mathbf{h}(t_j)+1 < |t_j|+1 \leq \sum_{1 \leq i \leq n} (|t_i|)+1 = |\circ < t_1, \ldots, t_n > |$$

Riassumendo abbiamo provato che

$$\{\circ\} \cup \{\circ < t_1, \ldots, t_n > \ \mid t_1 \in X, \ldots, t_n \in X\} \subseteq \{t \mid \mathbf{h}(t) < |t|\}$$

quindi per induzione:

$$\mathbb{T}^n_\circ \subseteq \{t \in \mathbb{T}^n_\circ \mid \mathbf{h}(t) < |t|\}$$

Liste Vediamo ora un'ultimo esempio di strutture che possono essere facilmente definite induttivamente dall'alto. Dato un insieme di silmboli Σ e le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\frac{}{\varepsilon \in X}\ \mathcal{R}_1 \qquad \frac{H \in \Sigma \quad T \in X}{H :: T \in X}\ \mathcal{R}_2$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_\mathcal{R} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ come:

$$\phi_\mathcal{R}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon\} \cup \{H :: T \mid H \in \Sigma \wedge T \in X\}$$

Il minimo punto fisso di tale operatore è:

$$\Sigma^* = \bigcup \{Y \subseteq \mathcal{U} \mid \phi_\mathcal{R}(Y) \subseteq Y\}$$

Tale insieme può essere considerato l'insieme delle liste finite sull'alfabeto Σ. Sugli elementi di Σ^* possiamo definire alcune importanti operazioni. Ad esempio possiamo definire due operazioni $\mathbf{hd} : \Sigma^* \to \Sigma \cup \{\Omega\}$[1] e $\mathbf{tl} : \Sigma^* \to \Sigma^* \cup \{\Omega\}$ definite rispettivamente come:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl} \mathbf{hd}(\varepsilon) & = & \Omega & \mathbf{tl}(\varepsilon) & = & \Omega \\ \mathbf{hd}(H :: T) & = & H & \mathbf{tl}(H :: T) & = & T \end{array}$$

Un'altra importante operazione è $\mathbf{L} : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ che ad ogni lista associa la propria lunghezza definita come:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{L}(\varepsilon) & = & 0 \\ \mathbf{L}(H :: T) & = & \mathbf{L}(T) + 1 \end{array}$$

[1] Ω può essere considerato un valore indefinito

Introduciamo infine una classe di operazioni $|\cdot|_i : \Sigma^* \to \Sigma$ che ad ogni coppia lista e numero naturale associa il simbolo che occorre nella lista alla posizione indicata. Possiamo definire $|\cdot|_i$ come segue:

$$\begin{array}{lcll} |\varepsilon|_i & = & \Omega & \text{per ogni } i \\ |H :: T|i & = & H & \text{se } i = 0 \\ |H :: T|i & = & |T|_{i-1} & \text{se } i \neq 0 \end{array}$$

Vedremo l'utilizzo di queste operazioni nel seguito.

4 Insieme coinduttivamente definito dal basso

Un secondo insieme particolarmente interessante è il seguente.

Definizione 7. *L'**insieme coinduttivamente definito da** ϕ **dal basso** è l'insieme:*

$$C_*^\phi \stackrel{def}{=} \bigcup\{Y \subseteq \mathcal{U} \mid Y \subseteq \phi(Y)\}$$

L'esistenza di C_*^ϕ è giustificata dalla proprietà 4 rispetto a $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Teorema 8.

(i) $C_* = \phi(C_*)$

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $X \subseteq \phi(X)$ *abbiamo* $X \subseteq C_*$.

(iii) $\forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *t.c.* $X \subseteq \phi(X)$ *abbiamo* $X \subseteq Y$ *allora* $C_* \subseteq Y$.

Dimostrazione.

(i) Dato $H \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) | X \subseteq \phi(X)\}$ abbiamo:

$[C_* \subseteq \phi(C_*)]$

$$\begin{array}{llcl} & \forall X \in H & X \subseteq \bigcup H = C_* & \text{definizione di } C_* \\ \Longrightarrow & \forall X \in H & \phi(X) \subseteq \phi(\bigcup H) = \phi(C_*) & \text{monotonia di } \phi \\ \Longrightarrow & \forall X \in H & X \subseteq \phi(X) \subseteq \phi(\bigcup H) = \phi(C_*) & \forall X \in H (X \subseteq \phi(X)) \\ \Longrightarrow & \multicolumn{2}{c}{\bigcup\{X | X \in H\} \subseteq \bigcup\{\phi(X) | X \in H\} \subseteq \phi(\bigcup H) = \phi(C_*)} & \text{quantificazione} \\ \Longrightarrow & \multicolumn{2}{c}{C_* \subseteq \phi(C_*)} & \bigcap\{X | X \in H\} = C_* \end{array}$$

$[\phi(C_*) \subseteq C_*]$

$$\begin{array}{lcl} & C_* \subseteq \phi(C_*) & \text{appena dimostrato} \\ \Longrightarrow & \phi(C_*) \subseteq \phi(\phi(C_*)) & \text{monotonia di } \phi \\ \Longrightarrow & \phi(C_*) \in H & \text{definizione di } H \\ \Longrightarrow & \phi(C_*) \subseteq \bigcup H = C_* & \text{proprietà di } \bigcup \\ \Longrightarrow & \phi(C_*) \subseteq C_* & \end{array}$$

(ii) Ogni $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tale che $X \subseteq \phi(X)$ appartiene ad H, per la definizione di H stesso, quindi $X \subseteq \bigcup H = C_*$.
(iii) Segue immediatamente dal fatto che $C_* \subseteq \phi(C_*)$. □

Il teorema ci dice (i) che C_* è un punto fisso di ϕ e in particolare (ii)-(iii) è il *massimo post punto fisso* di ϕ. In realtà il teorema ci dice qualcosa in più cioè che C_* è anche il *massimo punto fisso* di ϕ. Riformulando (ii) abbiamo il principio di Coinduzione:

$$\textbf{Coinduzione} \quad X \subseteq \phi(X) \implies X \subseteq C_*$$

Vediamo ora alcuni esempi di insiemi coinduttivamente definiti dal basso e come il principio di coinduzione viene utilizzato nei diversi casi.

Numeri Interi Date le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\frac{x \in X}{s(x) \in X}\ \mathcal{R}_s$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ come:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{S(x) \mid x \in X\}$$

Il massimo punto fisso di tale operatore:

$$\mathbf{Z} = \bigcap \{Y \subseteq \mathcal{U} \mid \phi_{\mathcal{R}}(Y) \subseteq Y\}$$

può essere considerato l'insieme i cui oggetti sono (in corrispondenza con) i numeri interi. Vediamo di chiarire meglio questa affermazione. Se prendiamo un oggetto $i \in \mathbf{Z}$ che chiamiamo $\underline{0}$ avremo che:

$$\begin{array}{rcl} & & \underline{0} \in \mathbf{Z} \\ \exists\ s(\underline{0}) & = & \underline{1} \in \mathbf{Z} \\ \exists\ s(s(\underline{0})) & = & \underline{2} \in \mathbf{Z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exists\ \overbrace{s(s(\cdots s}^{\text{n volte}}(\underline{0})\cdots)) & = & \underline{n} \in \mathbf{Z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

ma allo stesso tempo avremo anche che:

$$\begin{array}{rcc} \exists\ \underline{-1} \in \mathbf{Z}:\ s(\underline{-1}) & = & \underline{0} \\ \exists\ \underline{-2} \in \mathbf{Z}:\ s(\underline{-2}) & = & \underline{-1} \\ \exists\ \underline{-3} \in \mathbf{Z}:\ s(\underline{-3}) & = & \underline{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exists\ \underline{-(n+1)} \in \mathbf{Z}:\ s(\underline{-(n+1)}) & = & \underline{-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Quindi possiamo vedere l'insieme **Z** come in corrispondenza con

$$\{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, m, \dots\}$$

La definizione dei numeri interi data in questo modo si basa sulla proprietà di ogni numero intero di avere un insieme infinito ma numerabile di numeri che lo precedono, in realtà abbiamo che qualsiasi oggetto di **Z** può essere interpretato come lo $\underline{0}$ o come qualsiasi altro numero intero, in realtà abbiamo che tutti gli elementi di **Z** sono tra loro isomorfi.
Si noti come questa definizione non sia del tutto soddisfacente, per esempio non abbiamo $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$. Anche per questo motivo solitamente i numeri interi vengono definiti formalmente induttivamente.

Alberi finiti e infiniti Date le regole ottenute dal seguente schema:

$$\frac{}{\circ \in X}\ \mathcal{R}_1 \qquad \frac{t_1 \in X, \dots, t_n \in X}{\circ < t_1, \dots, t_n > \in X}\ \mathcal{R}_2$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{T}_\Sigma) \to \mathcal{P}(\mathcal{T}_\Sigma)$ come:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\circ\} \cup \{\circ < t_1, \dots, t_n > \ \mid t_1 \in X, \dots, t_n \in X\}$$

L'insieme coinduttivamente generato dal basso da tale operatore è:

$$\mathbb{T}_\circ^{\leq\infty} = \bigcup\{Y \subseteq \mathcal{U} \mid Y \subseteq \phi_{\mathcal{R}}(Y)\}$$

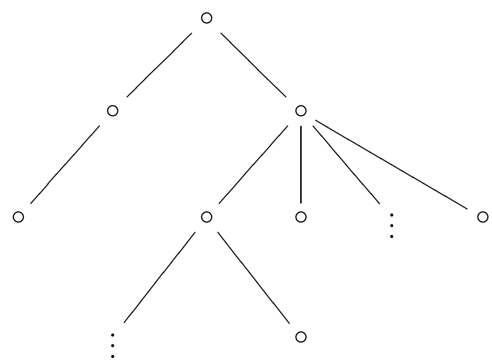
Vogliamo mostrare:

$$\mathbb{T}_\circ^n \subseteq \mathbb{T}_\circ^{\leq\infty}$$

Questo segue immediatamente per coinduzione dal fatto che come abbiamo visto precedentemente:

$$\mathbb{T}_\circ^n = \phi_{\mathcal{R}}(\mathbb{T}_\circ^n)$$

Abbiamo quindi che, gli alberi finiti su $\mathcal{L} = \{\circ\}$, sono un sottoinsieme di $\mathbb{T}_\circ^{\leq\infty}$. Questo fatto era prevedibile in quanto$\mathbb{T}_\circ^n$ e $\mathbb{T}_\circ^{\leq\infty}$ sono rispettivamente il minimo e il massimo punto fisso dello stesso operatore $\phi_{\mathcal{R}}$.
$\mathbb{T}_\circ^{\leq\infty}$ può essere considerato l'insieme i cui oggetti sono (in corrispondenza con) gli alberi su $\mathcal{L} = \{\circ\}$ di ramificazione finita e altezza finita o infinita.
Utilizzando l'usuale rappresentazione grafica degli alberi possiamo rappresentare graficamente l'albero infinito: $\circ < \circ < \circ >, \circ < \circ < \vdots, \circ >, \circ, \vdots, \circ >>$ come:



Possiamo estendere le funzioni definite su $\mathbb{T}_\circ^n$ a $\mathbb{T}_\circ^{\leq\infty}$. Abbiamo una funzione $\mathbf{h} : \mathbb{T}_\circ^{\leq\infty} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, che ad ogni albero associa la relativa altezza.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{h}(\circ) & = & 0 \\ \mathbf{h}(\circ < t_1, \ldots, t_n >) & = & \max\limits_{1 \leq i \leq n} (\mathbf{h}(t_i)) + 1 \end{array}$$

Analogamente abbiamo una funzione $|\cdot| : \mathbb{T}_\circ^{\leq\infty} \to \mathbb{N} \cup \infty$ che ad ogni albero associa il relativo numero di nodi:

$$\begin{array}{rcl} |\circ| & = & 1 \\ |\circ < t_1, \ldots, t_n >| & = & \sum\limits_{1 \leq i \leq n} (|t_i|) + 1 \end{array}$$

Infine abbiamo una funzione $\mathbf{b} : \mathbb{T}_\circ^n \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ che ad ogni albero associa il numero massimo di rami che un unico nodo dell'albero ha associati:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{b}(\circ) & = & 0 \\ \mathbf{b}(\circ < t_1, \ldots, t_n >) & = & \max(\mathbf{b}(t_1), \ldots, \mathbf{b}(t_n), n) \end{array}$$

Vedremo nel seguito come utilizzare tali funzioni.

Liste Infinite Dato un alfabeto Σ e le regole ottenute dal seguente schema:

$$\frac{H \in \Sigma \quad T \in X}{H :: T \in X} \; \mathcal{R}$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_\mathcal{R} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ come:

$$\phi_\mathcal{R}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{H :: T \mid T \in X\}$$

Il massimo punto fisso di tale operatore è:

$$\Sigma^\infty = \bigcup \{Y \subseteq \mathcal{U} \mid Y \subseteq \phi_\mathcal{R}(Y)\}$$

A tale insieme abbiamo associato un principio di coinduzione che può essere riformulato nel modo seguente:

$$X \subseteq \{H :: T \mid T \in X\} \Longrightarrow \; X \subseteq \Sigma^{\infty}$$

Vogliamo ora mostrare tramite una semplice applicazione del principio di coinduzione che se $\{0,1\} \subseteq \Sigma$, l'insieme X definito come segue

$$X = \{b_1 :: b_2 :: \cdots b_n \cdots \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (\forall i \leq n\ b_i = 0\ \wedge\ \forall j > n\ b_j = 1)\}$$

è un sottoinsieme dell'insieme coinduttivamente definito Σ^{∞}. Si può verificare facilmente che $X \subseteq \phi_{\mathcal{R}}(X)$, infatti:

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathcal{R}}(X) &= \{H :: S \mid H \in \Sigma \wedge S \in X\} \\
&= \{H :: b_1 :: b_2 \cdots b_n \cdots \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (\forall i \leq n\ b_i = 0\ \wedge\ \forall j > n\ b_j = 1)\} \\
&\supseteq \{b_1 :: b_2 :: \cdots b_n \cdots \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (\forall i \leq n\ b_i = 0\ \wedge\ \forall j > n\ b_j = 1)\}
\end{aligned}$$

quindi per coinduzione abbiamo

$$X \subseteq \Sigma^{\infty}$$

Quanto appena mostrato non dovrebbe stupire infatti Σ^{∞} corrisponde esattamente con l'insieme di tutte le liste infinite sull'alfabeto Σ.

5 Interpretazione intuitiva

Vogliamo ora dare semplici interpretazioni intuitive dei principi di induzione e di coinduzione.
Dati due insiemi X, Y, la relazione di inclusione $Y \subseteq X$ può essere interpretata in diversi modi, a seconda dell'insieme sul quale ci interessa focalizzare l'attenzione. Due interpretazioni ci sembrano particolarmente rilevanti:

(i) se consideriamo X come l'insieme di elementi di $\mathcal{U}$ che soddisfano la generica proprietà P_x[2] abbiamo che la relazione $Y \subseteq X$ ci dice che tutti gli elementi di un determinato Y godono anch'essi della proprietà P_x

(ii) se consideriamo X come a un generico insieme di elementi, la relazione $Y \subseteq X$ ci dice che tutti gli elementi di un determinato Y appartengono all'insieme X.

Queste due semplici interpretazioni sono sufficienti per ricavare la maggior parte delle informazioni a cui solitamente siamo interessati.
In generale dato un insieme generico G siamo interessati a mostrare che G gode di determinate proprietà cioè mostrare $G \subseteq Y$ per un qualche Y

[2]si faccia attenzione che in generale utilizzeremo lo stesso simbolo X per riferirci a una proprietà e alla sua *estensione*, l'insieme di elementi che soddisfano tale proprietà

oppure che particolari elementi, un insieme X di $\mathcal{U}$, appartengono a G, cioè mostrare $X \subseteq G$.
Rileggendo sotto queste interpretazioni il principio di induzione, abbiamo che se siamo in grado di caratterizzare un insieme G induttivamente dall'alto tramite un operatore ϕ:

$$G = I_\phi^*$$

e se la proprietà P è "preservata" dall'applicazione di ϕ, dove il termine "preservata" indica qui il fatto che tutti gli elementi ottenuti applicando l'operatore ϕ all'insieme degli elementi che godono della proprietà P godono anch'essi della proprietà P:

$$\phi(P) \subseteq P$$

allora l'insieme G gode della proprietà P.

$$G \subseteq P$$

Una seconda formulazione interessante dello stesso principio è ottenuta considerando l'estensione della proprietà considerata. Abbiamo che se l'estensione della proprietà P è contenuta nell'insieme induttivamente definito dall'alto da ϕ:

$$P \subseteq I_\phi^*$$

e la proprietà P è "preservata" dall'applicazione di ϕ:

$$\phi(P) \subseteq P$$

allora l'estensione della proprietà G coincide con l'insieme induttivamente definito dall'alto da ϕ.

$$P = I_\phi^*$$

Seguendo le nostre interpretazioni risulta chiaro che il principio di induzione è utile nei casi in cui vogliamo dimostrare alcune proprietà dell'insieme induttivamente definito oppure vogliamo mostrare la coincidenza dell'insieme induttivamente definito con una sua parte. Al contrario in questa sua formulazione il principio di induzione non ci è utile quando vogliamo mostrare l'appartenenza di particolari elementi a tale insieme.
Analogamente reinterpretando il principio di coinduzione abbiamo che se siamo in grado di caratterizzare un insieme G coinduttivamente dal basso tramite un operatore ϕ:

$$G = C_*^\phi$$

e se un insieme di oggetti X è "invariante" rispetto all'applicazione di ϕ, dove il termine "invariante" indica il fatto che l'applicazione di ϕ all'insieme dato contiene tutti gli elementi dell'insieme stesso:

$$X \subseteq \phi(X)$$

allora tale insieme X è contenuto nell'insieme G.

$$X \subseteq G$$

Un'altra formulazione interessante dello stesso principio è ottenuta considerando insiemi generali contenti l'insieme coinduttivamente definito. Abbiamo che se un insieme X contiene l'insieme coinduttivamente definito dal basso da ϕ:

$$C_*^\phi \subseteq X$$

e X è "invariante" rispetto all'applicazione di ϕ:

$$X \subseteq \phi(X)$$

allora X coincide con l'insieme coinduttivamente definito dal basso da ϕ o in altre parole possiamo caratterizzare X coinduttivamente dal basso.

$$P = C_*^\phi$$

Risulta chiaro che, seguendo le nostre interpretazioni, il principio di coinduzione è utile nei casi in cui vogliamo mostrare l'appartenenza ad un insieme coinduttivamente definito. D'altra parte esso non ci aiuta quando vogliamo provare proprietà di tale insieme.
Bisogna infine osservare che grazie al fatto che gli insiemi induttivamente e coinduttivamente definiti sono anche rispettivamente il minimo e il massimo punto fisso dell'operatore ϕ possiamo ricavare informazioni riguardo agli insiemi che risultano essere punti fissi intermedi. Infatti abbiamo il seguente principio:

$$\phi(X) = X \implies I_\phi^* \subseteq X \subseteq C_*^\phi \tag{1}$$

Purtroppo le definizioni come quelle che abbiamo dato per l'insieme induttivamente definito dall'alto e per l'insieme coinduttivamente definito pur essendo semplici soffrono di un difetto che nella pratica informatica risulta sconveniente. Prendiamo la definizione di insieme induttivamente definito dall'alto:

$$I_\phi^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\{Y \subseteq \mathcal{U} \mid \phi(Y) \subseteq Y\}$$

chiaramente l'insieme $I_\phi^* \subseteq \mathcal{U}$ e in particolare dal teorema 6 segue che $\phi(I_\phi^*) \subseteq I_\phi^*$ quindi $I_\phi^* \in \{Y \subseteq \mathcal{U} \mid \phi(Y) \subseteq Y\}$. Esplicitando questo fatto e ricordando le proprietà dell'intersezione insiemistica abbiamo quindi che

$$I_\phi^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\{Y \subseteq \mathcal{U} \mid \phi(Y) \subseteq Y\} \cap I_\phi^*$$

e cioè I_ϕ^* è definito in termini di se stesso. Lo stesso discorso lo si può fare nel caso dell'insieme coinduttivamente definito dal basso. Definizioni che utilizzano questo tipo di circolarità, dette definizioni *non predicative* pur non essendo dannose in questo contesto lo diventarlo se quello a cui siamo interessati è mostrare come un insieme viene *costruito*. Per questo motivo sono state cercate formulazioni *predicative* di tali definizioni; tali caratterizzazioni perdono di generalità rispetto alle precedenti perchè dipendono da alcune proprietà di particolari insiemi di regole $\mathcal{R}$. Nonostante ciò queste restrizioni nella pratica sono spesso accettabili e il vantaggio dell'utilizzo di queste caratterizzazioni risulta perciò notevole.

Nel seguito utilizzeremo spesso le iterazione n-esime di un operatore $\phi : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ definite dal seguente schema ricorsivo:

$$\begin{array}{rcl} \phi^0(X) & = & X \\ \phi^{n+1}(X) & = & \phi(\phi^n(X)) \end{array}$$

6 Insieme induttivamente definito dal basso

Se l'insieme di regole $\mathcal{R}$ è finitario possiamo dare una caratterizzazione alternativa dell'insieme induttivamente definito.

Definizione 9. *Dato $\mathcal{R}$ finitario l'**insieme induttivamente definito da ϕ dal basso** è il maggiorante della catena delle iterate n-sime con base $\emptyset$, cioè:*

$$I_*^\phi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi^n(\emptyset)$$

L'esistenza di I_*^ϕ è giustificata dalla proprietà 4 rispetto a $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Teorema 10.

(i) $I_*^\phi = \phi(I_*^\phi)$

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $\phi(X) \subseteq X$ *abbiamo* $I_*^\phi \subseteq X$.

(iii) $\forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *t.c.* $\phi(X) \subseteq X$ *abbiamo* $Y \subseteq X$ *allora* $Y \subseteq I_*^\phi$.

Dimostrazione.
(i)
$[\phi(I_*^\phi) \subseteq I_*^\phi]$

$$\begin{array}{lcl} & \forall x \in \phi(I_*^\phi)\ \exists (S,x) \in \mathcal{R}\ t.c.\ S \subseteq I_*^\phi = \bigcup \phi^n(\emptyset) & \text{definizione} \\ \Longrightarrow & \exists m \in \mathbb{N}\ t.c.\ S \subseteq \phi^m(\emptyset) \subseteq I_*^\phi & \mathcal{R} \text{ è finitatio} \\ \Longrightarrow & x \in \phi^{m+1}(\emptyset) & \phi(\phi^m(\emptyset)) = \phi^{m+1}(\emptyset) \\ \Longrightarrow & \phi(I_*^\phi) \subseteq I_*^\phi & \phi^{m+1}(\emptyset) \subseteq \bigcup \phi^n(\emptyset) = I_*^\phi \end{array}$$

$[I_*^\phi \subseteq \phi(I_*^\phi)]$

$$
\begin{array}{lccl}
 & \forall m \in \mathbb{N} & \phi^m(\emptyset) \subseteq \bigcup \phi^n(\emptyset) = I_*^\phi & \text{definizione di } I_*^\phi \\
\Longrightarrow & \forall m \in \mathbb{N} & \phi(\phi^m(\emptyset)) = \phi^{m+1}(\emptyset) \subseteq \phi(\bigcup \phi^n(\emptyset)) = \phi(I_*^\phi) & \text{monotonia di } \phi \\
\Longrightarrow & & \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \phi^{m+1}(\emptyset) \subseteq \phi(\bigcup \phi^n(\emptyset)) = \phi(I_*^\phi) & \text{quantificazione} \\
\Longrightarrow & & I_*^\phi = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \phi^m(\emptyset) \subseteq \phi(\bigcup \phi^n(\emptyset)) = \phi(I_*^\phi) & \phi^0(\emptyset) = \emptyset \subseteq \phi^1(\emptyset) \\
\Longrightarrow & & I_*^\phi \subseteq \phi(I_*^\phi) &
\end{array}
$$

(ii) lo dimostriamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tale che $\phi(X) \subseteq X$ abbiamo:

Base $\emptyset = \phi^0(\emptyset) \subseteq X$ per definizione di $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

P.I. Supponiamo $\phi^n(\emptyset) \subseteq X$ allora per monotonia $\phi^{n+1}(\emptyset) = \phi(\phi^n(\emptyset)) \subseteq \phi(X) \subseteq X$.

Quindi $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\phi^n(\emptyset) \subseteq X)$ allora $I_*^\phi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi^n(\emptyset) \subseteq X$.
(iii) Segue immediatamente dal fatto che $\phi(I_*^\phi) \subseteq I_*^\phi$. □

Una immediata conseguenza di questo teorema è che, se l'insieme di regole $\mathcal{R}$ è finitatio, I_*^ϕ è una caratterizzazione alternativa dell'insieme induttivamente definito dall'alto, questo viene confermato dal seguente teorema.

Teorema 11. *Dato $\mathcal{R}$ finitario:*

$$I_\phi^* = I_*^\phi$$

Dimostrazione. Dal teorema 6-(i) $\phi(I_\phi^*) \subseteq I_\phi^*$ quindi dal teorema 10-(ii) $I_*^\phi \subseteq I_\phi^*$. Viceversa dal teorema 10-(i) $\phi(I_*^\phi) \subseteq I_*^\phi$ quindi dal terorema 6-(ii) segue immediatamente $I_\phi^* \subseteq I_*^\phi$. □

Quindi se l'insieme di regole è finitario chiameremo l'insieme $I = I_\phi^* = I_*^\phi$ semplicemente l'**insieme induttivamente definito da ϕ**.
Abbiamo già notato come il principio di induzione sia utile nei casi in cui si vuole mostrare la validità di alcune proprietà dell'insieme induttivamente definito. La caratterizzazione dal basso (sempre sotto l'ipotesi di finitarietà delle regole) ci permette di riformulare il principio di induzione come:

$$\textbf{Induzione dal basso} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \phi^n(\emptyset) \subseteq X \Longrightarrow I_*^\phi \subseteq X$$

Questa formulazione del principio di induzione ci permette di provare la validità di proprietà dell'insieme induttivamente definito da ϕ tramite l'usuale principio di induzione sui numeri naturali.
La caratterizzazzione dal basso ci permette anche di avere informazioni riguardo agli oggetti contenuti nell'insieme induttivamente definito, infatti abbiamo il seguente risultato:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ X \subseteq \phi^n(\emptyset) \Longrightarrow X \subseteq I_*^\phi \tag{2}$$

Questo vuol dire che per provare l'appartenenza di un elemento all'insieme induttivamente definito da ϕ è sufficiente mostrare che esiste una "costruzione" di tale elemento, con il termine costruzione intendiamo riferirci a un albero costruito tramite le regole da cui ϕ è indotto.

Relazione d'ordine Date le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\frac{}{(0, s(0)) \in X}\ \mathcal{R}_1 \qquad \frac{(n,m) \in X}{(s(n), s(m)) \in X}\ \mathcal{R}_2 \qquad \frac{(n,l) \in X \quad (l,m) \in X}{(n,m) \in X}\ \mathcal{R}_3$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ come:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{0, s(0)\} \cup \{(s(n), s(m)) \mid (n,m) \in X\} \cup \{(n,m) \mid (n,l), (l,m) \in X\}$$

Il minimo punto fisso di tale operatore è l'insieme:

$$< \; = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^n_{\mathcal{R}}(\emptyset)$$

È immediato verificare che la relazione $<$ è la relazione d'ordine tra numeri naturali. Nel seguito scriveremo $n < m$ anzichè $(n,m) \in <$. Vogliamo mostrare ad esempio che $0 < s(s(s(0)))$ dal fatto 2 ci basta mostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale per cui $\{(0, s(s(s(0))))\} \subseteq \phi^n_{\mathcal{R}}(0)$, o in altri termini che esiste una derivazione per $0 < s(s(s(0)))$ tramite $\mathcal{R}$ di altezza n. Una tale derivazione è ad esempio la seguente:

$$\dfrac{\dfrac{}{0 < s(0)}\,\mathcal{R}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{0 < s(0)}\,\mathcal{R}_1 \quad \dfrac{\dfrac{}{0 < s(0)}\,\mathcal{R}_1}{s(0) < s(s(0))}\,\mathcal{R}_2}{0 < s(s(0))}\,\mathcal{R}_3}{s(0) < s(s(s(0)))}\,\mathcal{R}_2}{0 < s(s(s(0)))}\,\mathcal{R}_3$$

Equivalenza di Liste Dato l' insieme Σ^* di liste di simboli in Σ e le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\frac{}{(\varepsilon, \varepsilon) \in X}\ \mathcal{R}_1 \qquad \frac{H = H' \quad (T, T') \in X}{(H :: T, H' :: T') \in X}\ \mathcal{R}_2$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\Sigma^* \times \Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^* \times \Sigma^*)$ come:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\varepsilon, \varepsilon)\} \cup \{(H :: T, H' :: T') \mid H = H' \wedge (T, T') \in X\}$$

L'insieme definito induttivamente da $\phi_{\mathcal{R}}$ può essere caratterizzato dal basso come:

$$\mathbf{Eq}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi^n_{\mathcal{R}}(\emptyset)$$

Tale relazione coincide con la relazione di equivalenza su Σ^*. Il fatto che $\mathbf{Eq}^*$ sia caratterizzabile dal basso ci dice che due liste sono equivalenti se esiste una costruzione di tale equivalenza, ad esempio il seguente albero dimostra il fatto ovvio che $(H :: O :: L :: \varepsilon, H :: O :: L :: \varepsilon) \in \mathbf{Eq}^*$.

$$\dfrac{H = H \quad \dfrac{O = O \quad \dfrac{L = L \quad \dfrac{}{(\varepsilon,\varepsilon) \in \mathbf{Eq}^*}\,\mathcal{R}_1}{(L :: \varepsilon, L :: \varepsilon) \in \mathbf{Eq}^*}\,\mathcal{R}_2}{(O :: L :: \varepsilon, O :: L :: \varepsilon) \in \mathbf{Eq}^*}\,\mathcal{R}_2}{(H :: O :: L :: \varepsilon, H :: O :: L :: \varepsilon) \in \mathbf{Eq}^*}\,\mathcal{R}_2$$

Questo fatto per quanto banale giustifica il seguente principio:

$$(\mathbf{L}(S) = \mathbf{L}(R)) \wedge (\forall 0 \leq i \leq \mathbf{L}(S)(|S|_i = |S|_i)) \Longrightarrow (S,R) \in \mathbf{Eq}^* \qquad (3)$$

Ancora Numeri Naturali Vediamo ora un esempio di insieme definito induttivamente che non può essere semplicemente caratterizzato dal basso[3]. Date le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\dfrac{}{0 \in X}\,\mathcal{R}_0 \qquad \dfrac{x \in X}{s(x) \in X}\,\mathcal{R}_s \qquad \dfrac{0, s(0), s(s(0)), \ldots \in X}{\infty \in X}\,\mathcal{R}_\infty$$

Dato l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \cup \{S(x) \mid x \in X\} \cup \{\infty \mid 0, s(0), s(s(0)), \ldots \in X\}$$

possiamo definire il minimo punto fisso di tale operatore come:

$$\mathbf{N}^\infty = \bigcap \{Y \subseteq \mathcal{U} \mid \phi_{\mathcal{R}}(Y) \subseteq Y\}$$

che non coincide con:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi^n_{\mathcal{R}}(\emptyset) = \mathbf{N}$$

[3] è possibile caratterizzare tale insieme dal basso tramite una definizione per ricorsione transfinita

Alberi con ramificazione infinita Un altro esempio di insieme definito induttivamente che non può essere semplicemente caratterizzato dal basso[4]. Date le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\frac{t \in \mathbb{T}_\circ^n}{t \in X}\,\mathcal{R}_1 \qquad \frac{t_1 \in X, \ldots, t_n \in X}{\circ < t_1, \ldots, t_n > \in X}\,\mathcal{R}_2 \qquad \frac{t_1 \in X, \ldots, t_n \in X, \ldots}{\circ < t_1, \ldots, t_n, \ldots > \in X}\,\mathcal{R}_3$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{T}_\Sigma) \to \mathcal{P}(\mathcal{T}_\Sigma)$ come:

$$\begin{gathered}\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{t | t \in \mathbb{T}_\circ^n\} \cup \{\circ < t_1, \ldots, t_n > \ | \ t_1 \in X, \ldots, t_n \in X\} \\ \cup \{\circ < t_1, \ldots, t_n, \ldots > \in X \mid t_1 \in X, \ldots, t_n \in X, \ldots\}\end{gathered}$$

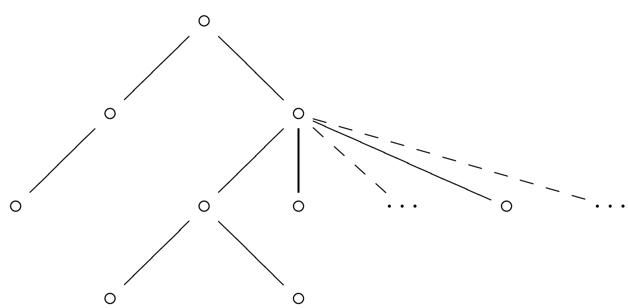
Il minimo punto fisso di tale operatore è l'insieme:

$$\mathbb{T}_\circ^{n,\infty} = \bigcap \{Y \subseteq \mathcal{T}_\Sigma \mid \phi_{\mathcal{R}}(Y) \subseteq Y\}$$

che non coincide con l'insieme:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_{\mathcal{R}}^n(\emptyset) = \mathbb{T}_\circ^n$$

Utilizzando l'usuale rappresentazione grafica degli alberi possiamo rappresentare graficamente l'albero infinito: $\circ < \circ < \circ >, \circ < \circ < \circ, \circ >, \circ, \ldots >>$ come:



$\mathbb{T}_\circ^{n,\infty}$ è l'insieme degli alberi di altezza finita ma ramificazione finita o infinita sull'alfabeto $\Sigma = \{\circ\}$.

7 Insieme coinduttivamente definito dall'alto

Se l'insieme di regole $\mathcal{R}$ è deterministico possiamo dare una caratterizzazione alternativa dell'insieme coinduttivamente definito.

Definizione 12. *Dato $\mathcal{R}$ deterministico l'**insieme coinduttivamente definito da ϕ dall'alto** è il minorante della catena delle iterate n-sime di ϕ con base $\mathcal{U}$, cioè:*

$$C_\phi^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi^n(\mathcal{U})$$

[4] vedi nota 3

Teorema 13.

(i) $C^*_\phi = \phi(C^*_\phi)$

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $X \subseteq \phi(X)$ *abbiamo* $X \subseteq C^*_\phi$.

(iii) $\forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *t.c.* $X \subseteq \phi(X)$ *abbiamo* $X \subseteq Y$ *allora* $C^*_\phi \subseteq Y$.

Dimostrazione.
(i)
$[\phi(\mathbf{C}^*_\phi) \subseteq \mathbf{C}^*_\phi]$

$$\begin{array}{rcl}
 & \forall m \in \mathbb{N} \quad C^*_\phi = \bigcap \phi^n(\mathcal{U}) \subseteq \phi^m(\mathcal{U}) & \text{definizione di } C^*_\phi \\
\Longrightarrow & \forall m \in \mathbb{N}\ \phi(C^*_\phi) = \phi(\bigcap \phi^n(\mathcal{U})) \subseteq \phi(\phi^m(\mathcal{U})) = \phi^{m+1}(\mathcal{U}) & \text{monotonia di } \phi \\
\Longrightarrow & \phi(C^*_\phi) = \phi(\bigcap \phi^n(\mathcal{U})) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \phi^{m+1}(\mathcal{U}) & \text{quantificazione} \\
\Longrightarrow & \phi(C^*_\phi) = \phi(\bigcap \phi^n(\mathcal{U})) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \phi^{m}(\mathcal{U}) = C^*_\phi & \phi^1(\mathcal{U}) \subseteq \phi^0(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \\
\Longrightarrow & \phi(C^*_\phi) \subseteq C^*_\phi &
\end{array}$$

$[\mathbf{C}^*_\phi \subseteq \phi(\mathbf{C}^*_\phi)]$

$$\begin{array}{rcl}
 & x \in C^*_\phi = \bigcap \phi^n(\mathcal{U}) \implies \forall n \in \mathbb{N}\ x \in \phi^n(\mathcal{U}) & \text{definizione} \\
\Longrightarrow & \forall n > 0 \in \mathbb{N}\ \exists (S_n, x) \in \mathcal{R}\ t.c.\ S_n \subseteq \phi^{n-1}(\mathcal{U}) & \phi^n(\mathcal{U}) = \phi(\phi^{n-1}(\mathcal{U})) \\
\Longrightarrow & \forall n > 0 \in \mathbb{N}\ \exists! (S, x) \in \mathcal{R}\ t.c.\ S \subseteq \phi^{n-1}(\mathcal{U}) & \mathcal{R} \text{ è deterministico} \\
\Longrightarrow & \exists! (S, x) \in \mathcal{R}\ t.c.\ S \subseteq \bigcap \phi^n(\mathcal{U}) & \text{quantificazione} \\
\Longrightarrow & x \in \phi(\bigcap \phi^n(\mathcal{U})) = \phi(C^*_\phi) & x = \phi(S) \\
\Longrightarrow & C^*_\phi \subseteq \phi(C^*_\phi) &
\end{array}$$

(ii) lo dimostriamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tale che $X \subseteq \phi(X)$ abbiamo:

Base $X \subseteq \phi^0(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ per definizione di $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

P.I. Supponiamo $X \subseteq \phi^n(\mathcal{U})$ allora per monotonia $X \subseteq \phi(X) \subseteq \phi^{n+1}(\mathcal{U}) = \phi(\phi^n(\mathcal{U}))$.

Quindi $\forall n \in \mathbb{N}$ $(X \subseteq \phi^n(\mathcal{U}))$ allora $X \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \phi^n(\mathcal{U}) = C^*_\phi$.
(iii) Segue immediatamente dal fatto che $C^*_\phi \subseteq \phi(C^*_\phi)$.

□

Anche da questo teorema come ci aspettiamo abbiamo che, se $\mathcal{R}$ è deterministico, C^*_ϕ è una caratterizzazione alternativa dell'insieme coinduttivamente definito dal basso, questo viene confermato dal seguente teorema.

Teorema 14. *Dato* $\mathcal{R}$ *deterministico:*

$$C^\phi_* = C^*_\phi$$

Dimostrazione. Dal teorema 8-(i) $C_*^\phi \subseteq \phi(C_*^\phi)$ quindi dal teorema 13-(ii) $C_*^\phi \subseteq C_\phi^*$. Viceversa dal teorema 13-(i) $C_\phi^* \subseteq \phi(C_\phi^*)$ quindi dal terorema 8-(ii) segue immediatamente $C_\phi^* \subseteq C_*^\phi$. □

Quindi se l'insieme di regole è finitario chiameremo l'insieme $C = C_\phi^* = C_*^\phi$ semplicemente l'**insieme coinduttivamente definito da** ϕ.
Abbiamo già notato come il principio di coinduzione sia utile nei casi in cui si vuole mostrare che un insieme appartiene all'insieme coinduttivamente definito. La caratterizzazione dall'alto (sempre sotto l'ipotesi di determinismo dell'insieme di regole) ci permette di riformulare il principio di coinduzione come:

$$\textbf{Coinduzione dall'alto} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ X \subseteq \phi^n(\mathcal{U}) \Longrightarrow\ X \subseteq C_\phi^*$$

Questa formulazione del principio di coinduzione ci permette di dimostrare che un insieme appartiene all'insieme coinduttivamente definito da ϕ tramite l'usuale principio di induzione sui numeri naturali.
La caratterizzazzione dall'alto ci permette anche di avere informazioni riguardo alle proprietà dell'insieme coinduttivamente definito, infatti abbiamo il seguente risultato:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \phi^n(\mathcal{U}) \subseteq X \Longrightarrow\ C_\phi^* \subseteq X \tag{4}$$

Questo vuol dire che per provare proprietà dell'insieme coinduttivamente definito da ϕ è sufficiente mostrare che l'estensione di tale proprietà contiene tutti gli oggetti ottenibili tramite iterazioni finite di ϕ.

Equivalenza di Liste infinite Prendiamo in considerazione un alfabeto Σ e l'insieme Σ^∞ delle liste infinite su tale alfabeto. Date le regole ottenute dal seguente schema:

$$\frac{H \in \Sigma \quad (T_1, T_2) \in X}{(H :: T_1, H :: T_2) \in X}\ \mathcal{R}$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_\mathcal{R} : \mathcal{P}(\Sigma^\infty \times \Sigma^\infty) \to \mathcal{P}(\Sigma^\infty \times \Sigma^\infty)$ come:

$$\phi_\mathcal{R}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{(H :: T_1, H :: T_2) \mid H \in \Sigma \wedge (T_1, T_2) \in X\}$$

Il massimo punto fisso di tale operatore è l'insieme:

$$\mathbf{Eq} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_\mathcal{R}^n(\Sigma^\infty \times \Sigma^\infty)$$

Tale relazione coincide con la relazione di equivalenza su Σ^∞. Ora se con s_i indichiamo il simbolo nella posizione i della lista infinita s abbiamo che per provare che due liste infinite sono equivalenti si può utilizzare l'induzione su $\mathbb{N}$ grazie alla seguente riformulazione del principio di coinduzione:

$$\forall i \in \mathbb{N}(|S|_i = |R|_i) \Longrightarrow (S, R) \in \mathbf{Eq}$$

Si noti come tale principio è l'estensione al caso infinito del principio di prova 3 per l'equivalenza di liste finite.

Alberi Infiniti Dato l'alfabeto $\Sigma = \{\circ\}$ e le regole ottenute dai seguenti schemi:

$$\frac{t_1 \in X, \ldots, t_n \in X}{\circ < t_1, \ldots, t_n > \in X} \mathcal{R}$$

possiamo definire l'operatore monotono $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(\mathcal{T}_\circ) \to \mathcal{P}(\mathcal{T}_\circ)$ come:

$$\phi_{\mathcal{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\circ < t_1, \ldots, t_n > \mid t_1 \in X, \ldots, t_n \in X\}$$

L'insieme coinduttivamente generato dall'alto da tale operatore è:

$$\mathbb{T}_\circ^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_{\mathcal{R}}^n(\mathcal{T}_\circ)$$

Vogliamo ora mostrare che $\mathbb{T}_\circ^\infty$ come ci aspettiamo ha la proprietà che ogni $t \in \mathbb{T}_\circ^\infty$ ha altezza infinita. Per far questo possiamo prendere l'estensione di tali proprietà, formalmente:

$$H = \{t \in \mathcal{T}_\circ \mid \forall n \in \mathbb{N}(\mathbf{h}(t) \geq n))\}$$

e mostrare che:

$$\mathbb{T}_\circ^\infty \subseteq H$$

Possiamo dare una formulazione alternativa di H infatti abbiamo che se definiamo per ogni $i \in \mathbb{N}$ un insieme:

$$H_i = \{t \in \mathcal{T}_\circ \mid \mathbf{h}(t) \geq i)\}$$

abbiamo che:

$$H = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i$$

Ora vogliamo mostrare che per ciascun $n \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\phi_{\mathcal{R}}^n(\mathcal{T}_\circ) \subseteq H_n$$

Naturalmente per $n = 0$ abbiamo: Ora vogliamo mostrare che per ciascun $n \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\phi_{\mathcal{R}}^0(\mathcal{T}_\circ) = \mathcal{T}_\circ \subseteq H_0$$

Supponiamo ora $\phi_{\mathcal{R}}^n(\mathcal{T}_\circ) \subseteq H_n$ vogliamo mostrare $\phi_{\mathcal{R}}^{n+1}(\mathcal{T}_\circ) \subseteq H_{n+1}$. Prendiamo $t \in \phi_{\mathcal{R}}^{n+1}(\mathcal{T}_\circ)$ abbiamo che per definizione $t = \circ < t_1, \ldots, t_n >$ dove

$t_1 \in \phi^n_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}_\circ), \ldots, t_n \in \phi^n_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}_\circ)$ quindi per ipotesi induttiva $t_1 \in H_n, \ldots, t_n \in H_n$. Ma per definizione di $\mathbf{h}$ abbiamo:

$$\mathbf{h}(\circ < t_1, \ldots, t_n >) = \sum_{1 \leq i \leq n} (\mathbf{h}(t_i)) + 1 \geq n + 1$$

Per induzione su $\mathbb{N}$ abbiamo che:

$$\forall n \in \mathbb{N}(\phi^n_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}_\circ) \subseteq H_n)$$

e quindi: L'insieme coinduttivamente generato dall'alto da tale operatore è:

$$\mathbb{T}^\infty_\circ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi^n_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}_\circ) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = H$$

Si noti come l'ultimo passaggio sia un'applicazione per ogni n dell'equazione 4.

8 Alcune osservazioni

Nella dimostrazione del teorema 10 l'ipotesi che l'insieme di regole $\mathcal{R}$ sia finitario viene utilizzata solo nella dimostrazione che:

$$\phi(I^\phi_*) \subseteq I^\phi_*$$

Questo fatto mostra che l'insieme I^ϕ_*, maggiorante della catena delle iterate n-esime di un operatore *generico* ϕ con base $\emptyset$, che sicuramente esiste per la proprietà 4 rispetto a $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, non è in generale un punto fisso. Allo stesso tempo però abbiamo che:

$$I^\phi_* \subseteq \phi(I^\phi_*)$$

vale in generale, quindi:

$$I^\phi_* \subseteq C^*_\phi$$

Inoltre maggiormente interessante è il fatto che I^ϕ_* è un minorante di tutti gli insiemi X tali che $X \subseteq \phi(X)$ e quindi minore del loro minimo.

$$I^\phi_* \subseteq I$$

Quindi possiamo riscrivere l'equazione 2 genericamente come:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ X \subseteq \phi^n(\emptyset) \Longrightarrow\ X \subseteq I \tag{5}$$

Questo principio ci peremette ad esempio di verificare che come ci aspettiamo ogni n che appartiene a $\mathbf{N}$ appartiene anche a $\mathbf{N}^\infty$.
Analogamente a quanto succede nel caso induttivo, nella dimostrazione del

teorema 13 l'ipotesi che l'insieme di regole $\mathcal{R}$ sia determistico viene utilizzata solo nella dimostrazione che:

$$C_\phi^* \subseteq \phi(C_\phi^*)$$

Questo fatto mostra che l'insieme C_ϕ^*, minorante della catena delle iterate n-esime di un operatore *generico* ϕ con base $\mathcal{U}$, che esiste per la proprietà 4 rispetto a $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, non è in generale un punto fisso. Allo stesso tempo però abbiamo che:

$$\phi(C_\phi^*) \subseteq C_\phi^*$$

vale in generale, quindi:

$$I_\phi^* \subseteq C_*^\phi$$

Inoltre è interessante il fatto che C_ϕ^* è un maggiorante di tutti gli insiemi X tali che $X \subseteq \phi(X)$ e quindi maggiore del loro massimo.

$$C \subseteq C_\phi^*$$

Quindi possiamo riscrivere l'equazione 4 come:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \phi^n(\mathcal{U}) \subseteq X \implies C \subseteq X \tag{6}$$

9 Componenti dirette

Risulta chiaro da tutte le definizioni e dimostrazioni fin qui esposte che le nozioni di insiemi induttivamente e coinduttivamente definiti e i rispettivi principi di dimostrazione sono tra loro strettamente correlate. In particolare quando tra due nozioni intercorre una relazione come quella tra induzione e coinduzione si dice che tali nozioni sono tra loro **duali**. In realtà è proprio il fatto che induzione e coinduzione sono nozioni duali che ci ha permesso di sviluppare una trattazione uniforme di entrambe le nozioni.
Ora però volgiamo dedicarci a un'interpretazione dei due principi in cui questa stretta correlazione viene in qualche modo a mancare.

Definizione 15. *Dato un operatore ϕ indotto da un insieme di regole $\mathcal{R}$, definiamo l'insieme $\mathcal{S}_\phi(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$ delle **componenti dirette** di x come:*

$$\mathcal{S}_\phi(x) \stackrel{def}{=} \{y \in \mathcal{U} \mid \exists (X, x) \in \mathcal{R} \ \wedge \ y \in X\}$$

Notiamo che la relazione $\mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \mid y \in \mathcal{S}_\phi(x)\}$ cattura esattamente la relazione che sussiste tra un elemento e gli elementi da cui possiamo definire in un passo tale elemento.
L'insieme $\mathcal{S}_\phi(x)$ può essere riscritto anche come unione di insiemi cioè nella forma:

$$\mathcal{S}_\phi(x) = \bigcup\{X \subseteq \mathcal{U} \mid \exists (X, x) \in \mathcal{R}\}$$

Si noti che $\mathcal{S}_\phi(x) = \emptyset$ se le regole in $\mathcal{R}$ da cui può essere ricavato x hanno la forma $(\emptyset, x)$ cioè assiomi ma anche se x non può essere ricavato da alcuna regola di $\mathcal{R}$. [5]
Definiamo l'insieme degli elementi **canonici** rispetto a ϕ proprio come l'insieme degli elementi che sono la conclusione di qualche regola in $\mathcal{R}$. Cioè:

$$\mathcal{C}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{U} \mid \exists (X, x) \in \mathcal{R}\}$$

Dalla definizione è chiaro che l'insieme $\mathcal{S}_\phi(x)$ può essere considerato "l'insieme degli elementi delle immagini inverse di x attraverso l'operatore ϕ", possiamo allora pensare di definire un nuovo operatore $\phi^{-1} : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ come:

$$\phi^{-1}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in X} \mathcal{S}_\phi(x)$$

Prendiamo in considerazione alcune proprietà di ϕ^{-1} che ci serviranno nel seguito. Innanzitutto osserviamo che tale operatore è *monotono*.

Lemma 16.

$$X \subseteq Y \Longrightarrow \phi^{-1}(X) \subseteq \phi^{-1}(Y)$$

Dimostrazione. Se $z \in \phi^{-1}(X)$ allora esiste $(Z, x) \in \mathcal{R}$ tale che $z \in Z$ e $x \in X$ ma $X \subseteq Y$ quindi $x \in Y$ e quindi $z \in \phi^{-1}(Y)$. □

Abbiamo poi alcune proprietà che dipendono da proprietà dell'insieme di regole da cui è definito ϕ. Se l'insieme di regole è *deterministico* abbiamo esattamente un solo insieme di premesse da cui è possibile dedurre in un passo x e quindi una sola immagine inversa:

$$\phi^{-1}(\{x\}) = \mathcal{S}_\phi(x) = \{X \subseteq \mathcal{U} \mid \exists (X, x) \in \mathcal{R}\}$$

Inoltre è immediato verificare che vale il seguente:

Fatto 17. *Se $\mathcal{R}$ è deterministico:*

$$\phi^{-1}(\phi(X)) \subseteq X$$

Dimostrazione.

$$\begin{array}{cc}
 & Y \subseteq \phi^{-1}(\phi(X)) \\
\Longrightarrow & Y \subseteq \bigcup_{z \in \phi(X)} \mathcal{S}_\phi(x) \\
\Longrightarrow & Y \subseteq \bigcup \{Z \subseteq \mathcal{U} \mid \exists (Z, z) \in \mathcal{R} \wedge z \in \phi(X)\} \\
\Longrightarrow & Y \subseteq \bigcup \{Z \subseteq \mathcal{U} \mid \exists (Z, z) \in \mathcal{R} \wedge z \in \{k | \exists (K, k) \in \mathcal{R} \wedge K \subseteq X\}\} \\
\Longrightarrow & Y \subseteq \bigcup \{Z \subseteq \mathcal{U} \mid \exists (Z, z) \in \mathcal{R} \wedge \exists (Z', z) \in \mathcal{R} \wedge Z' \subseteq X\}\} \\
\Longrightarrow & Y \subseteq \bigcup \{Z \subseteq \mathcal{U} \mid \exists (Z, z) \in \mathcal{R} \wedge Z \subseteq X\}\} \\
\Longrightarrow & Y \subseteq X
\end{array}$$

□

[5] Questo fatto può essere visto come una "parzialità" dell'operatore ϕ^{-1} introdotto sotto.

Mentre la seguente
$$\phi(\phi^{-1}(X)) \subseteq X \tag{7}$$
non vale in generale ma solo nel caso che non esistono in $\mathcal{R}$ due regole con ugual premesse e diversa conclusione.
Dal fatto 17 segue:

Fatto 18. *Se $\mathcal{R}$ è deterministico:*

$$X \subseteq \phi(Y) \Longrightarrow \phi^{-1}(X) \subseteq Y$$

Dimostrazione. $X \subseteq \phi(Y) \Longrightarrow \phi^{-1}(X) \subseteq \phi^{-1}(\phi(Y)) \subseteq (Y)$ □

Per ogni elemento canonico $X \subseteq \mathcal{C}(\phi)$ abbiamo che $\mathcal{S}_\phi(x) = \emptyset$ se e solo se le uniche regole in $\mathcal{R}$ da cui può essere ricavato x hanno la forma $(\emptyset, x)$ cioè assiomi.[6] È immediato verificare che vale il seguente:

Fatto 19. *Se $X \subseteq \mathcal{C}(\phi)$*
$$X \subseteq \phi(\phi^{-1}(X))$$

Dimostrazione.
$$\begin{array}{rc} & Y \subseteq X \subseteq \mathcal{C}(\phi) \\ \Longrightarrow & Y \subseteq \{z \in \mathcal{U} \mid \exists (Z,z) \in \mathcal{R} \wedge z \in X\} = X \subseteq \mathcal{C}(\phi) \\ \Longrightarrow & Y \subseteq \{z \in \mathcal{U} \mid \exists (Z,z) \in \mathcal{R} \wedge Z \in \{K \mid \exists (K,k) \in \mathcal{R} \wedge k \in X\} \\ \Longrightarrow & Y \subseteq \{z \in \mathcal{U} \mid \exists (Z,z) \in \mathcal{R} \wedge Z \in \bigcup\{K \mid \exists (K,k) \in \mathcal{R} \wedge k \in X\} \\ \Longrightarrow & Y \subseteq \phi(\phi^{-1}(X)) \end{array}$$
□

Mentre la seguente
$$X \subseteq \phi^{-1}(\phi(X)) \tag{8}$$
non vale in generale ma solo nel caso che non esistono in X elementi che non appaiono in alcuna premessa di alcuna regola.
Dal fatto 19 segue:

Fatto 20. *Se $X \subseteq \mathcal{C}(\phi)$:*

$$\phi^{-1}(X) \subseteq Y \Longrightarrow X \subseteq \phi(Y) \tag{9}$$

Dimostrazione. $\phi^{-1}(X) \subseteq Y \Longrightarrow X \subseteq \phi(\phi^{-1}(X)) \subseteq \phi(Y)$ □

[6]Questo ci permette, quando restringiamo la nostra attenzione agli elementi di $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\phi))$, di considerare l'operatore ϕ^{-1} come *totale*.

10 Componenti

Estendiamo ora la definizione di componente diretta a una nozione di componente generica. Per far ciò possiamo definire le iterate dell'operatore ϕ^{-1}. Possiamo definire le iterate n-esime dell'operatore ϕ^{-1} con base $X \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tramite il seguente schema ricorsivo:

$$\begin{array}{rcl} \phi_0^{-1}(X) & \stackrel{\text{def}}{=} & X \\ \phi_{n+1}^{-1}(X) & \stackrel{\text{def}}{=} & \phi^{-1}(\phi_n^{-1}(X)) \end{array}$$

La relazione $\mathfrak{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{(y,x) \mid y \in \mathcal{S}_\phi^*(x)\}$ è la chiusura riflessiva e transitiva della relazione $\mathfrak{R}$ tale relazione è spesso chiamata "engendering relation", essa cattura la relazione che sussiste tra un elemento e (tutti) gli elementi che servono a definire tale elemento.

Dimostriamo ora due importanti conseguenze delle nostre definizioni di ϕ^{-1} e di sue iterazioni, anche se esse non verranno poi effettivamente utilizzate nel seguito. [7]

Lemma 21. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$:*

$$\phi_n^{-1}(X) = \bigcup_{x \in X} \phi_n^{-1}(\{x\})$$

Dimostrazione. Iniziamo a dimostrare che per tutti gli $n \in \mathbb{N}$:

$$z \in \phi_n^{-1}(X) \Longrightarrow \exists x \in X (z \in \phi_n^{-1}(\{x\}))$$

$z \in \phi_n^{-1}(X)$ vuol dire che esiste $(X_n, x_n) \in \mathcal{R}$ tale che $z \in X_n$ e $x_n \in \phi_{n-1}^{-1}(X)$. Iterando lo stesso argomento n volte abbiamo:

$$\exists (X_n, x_n), (X_{n-1}, x_{n-1}), \dots, (X_1, x_1) \in \mathcal{R}(z \in X_n, x_n \in X_{n-1}, \dots, x_1 \in X)$$

ma per definizione di $\phi_n^{-1}(\{x_1\})$ abbiamo che $z \in \phi_n^{-1}(\{x_1\})$ e $x_1 \in X$.
Ora per concludere dobbiamo dimostrare che:

$$\forall x \in X (z \in \phi_n^{-1}(\{x\}) \Longrightarrow z \in \phi_n^{-1}(X))$$

Fissato un $x \in X$ e procedendo come sopra abbiamo che $z \in \phi_n^{-1}(\{x\})$ vuol dire che:

$$\exists (X_n, x_n), (X_{n-1}, x_{n-1}), \dots, (X_1, x_1) \in \mathcal{R}(z \in X_n, x_n \in X_{n-1}, \dots, x_1 = x)$$

ma ricordando che $x \in X$ abbiamo:

$$\exists (X_n, x_n), (X_{n-1}, x_{n-1}), \dots, (X_1, x_1) \in \mathcal{R}(z \in X_n, x_n \in X_{n-1}, \dots, x_1 \in X)$$

e quindi $z \in \phi_n^{-1}(X)$. □

[7] L'importanza di queste proprietà risiede nel fatto che giustificano il ragionare indifferentemente rispetto ad insiemi o rispetto a singoli "elementi"(visti comunque come insiemi).

Una importante conseguenza del lemma precedente è la seguente:

Lemma 22.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X) = \bigcup_{x\in X}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\{x\}))$$

Dimostrazione. Dato

$$z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X)$$

abbiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $z \in \phi_n^{-1}(X)$, quindi dalla dimostrazione del lemma 21 abbiamo che esiste $x \in X$ tale che $z \in \phi_n^{-1}(\{x\})$, da questo abbiamo

$$z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\{x\})$$

e quindi

$$z \in \bigcup_{x\in X}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\{x\}))$$

Viceversa dato

$$z \in \bigcup_{x\in X}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\{x\}))$$

abbiamo che esiste $x \in X$ tale che

$$z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\{x\})$$

e quindi esiste almeno un $n \in \mathbb{N}$ per cui $z \in \phi_n^{-1}(\{x\})$. Dalla dimostrazione del lemma 21 allora abbiamo che $z \in \phi_n^{-1}(X)$ e quindi

$$z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X)$$

□

Il seguente risultato ci sarà molto utile nel seguito.

Lemma 23.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X) = X \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\phi^{-1}(X))$$

Dimostrazione. Dato

$$x \in X \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\phi^{-1}(X))$$

abbiamo che se $x \in X = \phi_0^{-1}(X)$ allora $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X)$. Altrimenti

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\phi^{-1}(X))$$

allora esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in \phi_n^{-1}(\phi^{-1}(X))$ e cioè:

$\exists (X_n, x_n), (X_{n-1}, x_{n-1}), \ldots, (X_1, x_1) \in \mathcal{R}(x \in X_n, x_n \in X_{n-1}, \ldots, x_1 \in \phi^{-1}(X))$

ma se $x_1 \in \phi^{-1}(X)$ esiste (S, y) tale che $x_1 \in S$ e $y \in X$ e quindi

$\exists (X_n, x_n), (X_{n-1}, x_{n-1}), \ldots, (X_1, x_1), (S, y) \in \mathcal{R}(x \in X_n, x_n \in X_{n-1}, \ldots, x_1 \in S, y \in X)$

allora $x \in \phi_{n+1}^{-1}(X)$ e infine

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X)$$

Viceversa dato:

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X)$$

abbiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in \phi_n^{-1}(X)$.. Se $n = 0$ abbiamo $x \in \phi_0^{-1}(X) = X$. Altrimenti abbiamo:

$\exists (X_n, x_n), (X_{n-1}, x_{n-1}), \ldots, (X_1, x_1) \in \mathcal{R}(x \in X_n, x_n \in X_{n-1}, \ldots, x_1 \in X)$

ma quindi $X_1 \in \phi^{-1}(X)$ e $x_2 \in X_1$ e allora avremo

$\exists (X'_n, x'_n), (X'_{n-1}, x'_{n-1}), \ldots, (X'_1, x'_1) \in \mathcal{R}(x \in X'_n, x'_n \in X'_{n-1}, \ldots, x'_1 \in \phi^{-1}(X))$

cioè:

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\phi^{-1}(X))$$

□

La definizione delle iterate dell'operatore ϕ^{-1} ci permette di provare i seguenti risultati.

Lemma 24. *Se $\mathcal{R}$ è deterministico:*

$$X \subseteq \phi(X) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}(\phi_n^{-1}(X) \subseteq X)$$

Dimostrazione. Lo dimostriamo per induzione su $\mathbb{N}$:

Base $\phi_0^{-1}(X) = X \subseteq X$

P.I. Supponiamo $\phi_n^{-1}(X) \subseteq X$ siccome ϕ^{-1} è monotono abbiamo $\phi^{-1}(\phi_n^{-1}(X)) \subseteq \phi^{-1}(X)$ quindi $\phi_{n+1}^{-1}(X) \subseteq \phi^{-1}(X)$. Ora siccome $\mathcal{R}$ è deterministico da $X \subseteq \phi(X)$ e dal fatto 18 abbiamo $\phi^{-1}(X) \subseteq X$ quindi $\phi_{n+1}^{-1}(X) \subseteq X$.

□

Corollario 25. *Se $\mathcal{R}$ è deterministico:*

$$X \subseteq \phi(X) \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X) \subseteq X$$

Il lemma precedente ci dice che se l'insieme di regole $\mathcal{R}$ che induce l'operatore ϕ è deterministico abbiamo che ogni insieme X, per cui vale $X \subseteq \phi(X)$ contiene la "giustificazione" di se stesso. Cioè se prendiamo la relazione[8]

$$\mathfrak{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{(y,x) \mid y \in \mathcal{S}_\phi^*(x)\}$$

definita come la chiusura riflessiva e transitiva della relazione $\mathfrak{R}$, abbiamo che essa cattura la relazione che sussiste tra un elemento e (tutti) gli elementi che **servono** a definire tale elemento. Il lemma precedente può essere ora riletto come:

> se un insieme X è tale che $X \subseteq \phi(X)$ abbiamo che:
>
> $$\{y \mid (x,y) \in \mathfrak{R}^* \wedge x \in X\} \subseteq X$$

11 Insieme coinduttivamente definito per componenti

Possiamo ora dare una caratterizzazione alternativa dell'insieme coinduttivamente definito. Nel seguito assumeremo che ϕ sia **deterministico**.

Definizione 26. *L'**insieme coinduttivamente definito per componenti** è l'insieme definito come:*

$$C' \stackrel{def}{=} \bigcup\{X \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U}) \mid \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X) \subseteq \mathcal{C}(\phi)\}$$

Va notato che possiamo riscrivere C' tramite i suoi elementi:

$$C' = \{x \in \mathcal{U} \mid \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\{x\}) \subseteq \mathcal{C}(\phi)\}$$

Vogliamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 27.

(i) $C' = \phi(C')$

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $X \subseteq \phi(X)$ *abbiamo* $X \subseteq C'$.

(iii) $\forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *tale che* $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ *t.c.* $X \subseteq \phi(X)$ *abbiamo* $X \subseteq Y$ *allora* $C' \subseteq Y$.

[8] usualmente detta "engendering relation"

Dimostrazione.
(i)

$\phi(C') \subseteq C'$

$$\begin{array}{rcl}
 & X \subseteq \phi(C') \Longrightarrow \phi^{-1}(X) \subseteq C' \ \wedge \ X \subseteq \mathcal{C}(\phi) & \text{def. } \mathcal{C}(\phi),\ \phi \text{ det. e fatto 18} \\
\Longrightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\phi^{-1}(X)) \subseteq \mathcal{C}(\phi) \ \wedge \ X \subseteq \mathcal{C}(\phi) & \text{def. } C' \\
\Longrightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X) \subseteq \mathcal{C}(\phi) & \text{lemma 23} \\
\Longrightarrow & X \subseteq C' & \text{def. di } C' \\
\Longrightarrow & \phi(C') \subseteq C' &
\end{array}$$

$C' \subseteq \phi(C')$

$$\begin{array}{rcl}
 & X \subseteq C' \Longrightarrow (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X) \subseteq \mathcal{C}(\phi)) & \text{per def. di } C' \\
\Longrightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(\phi^{-1}(X)) \subseteq \mathcal{C}(\phi) & \text{per lemma 23} \\
\Longrightarrow & \phi^{-1}(X) \subseteq C' & \text{per def. di } C' \\
\Longrightarrow & \phi(\phi^{-1}(X)) \subseteq \phi(C') & \text{per monotonia di } \phi \\
\Longrightarrow & X \subseteq \phi(\phi^{-1}(X)) \subseteq \phi(C') & \text{perchè } X \subseteq \mathcal{C}(\phi)) \text{ e fatto 19} \\
\Longrightarrow & C' \subseteq \phi(C') &
\end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcl}
 & X \subseteq \phi(X) & \text{per ipotesi} \\
\Longrightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n^{-1}(X) \subseteq \mathcal{C}(\phi) & \phi \text{ deterministico e corollario 25} \\
\Longrightarrow & X \in C' &
\end{array}$$

(iii) Segue immediatamente dal fatto che $C' \subseteq \phi(C')$.

□

È ora immediato verificare il seguente teorema.

Teorema 28.

$$C = C'_\phi$$

Dimostrazione. Dal teorema 8-(i) $C \subseteq \phi(C)$ quindi dal teorema 27-(ii)(coinduzione) abbiamo $C \subseteq C'_\phi$. Dal teorema 27-(i) $C'_\phi \subseteq \phi(C'_\phi)$ quindi dal teorema 8-(ii)(coinduzione) abbiamo $C'_\phi \subseteq C$. □

Abbiamo così ottenuto (sotto l'ipotesi di determinismo) tre diverse caratterizzazioni dell'insieme coinduttivamente definito, ogni caratterizzazione ci fornisce una diversa interpretazione dell'insieme coinduttivamente definito stesso.

- C_* La caratterizzazzione dal basso ci dice che l'insieme coinduttivamente definito è il massimo (post)punto fisso dell'operatore ϕ.

- C^* La caratterizzazione dall'alto ci dice che l'insieme coinduttivamente definito da $\mathcal{R}$ è l'insieme ottenuto buttando via ripetutamente (un numero infinito di volte) gli elementi dell'insieme universo che non soddisfano le regole in $\mathcal{R}$.

- C' La definizione per componenti ci dice che l'insieme coinduttivamente definito è l'insieme degli elementi le cui componenti (insieme caratterizzato induttivamente) sono *tutte* canoniche, cioè la cui "giustificazione" (anche infinita) è ottenibile tramite le regole.